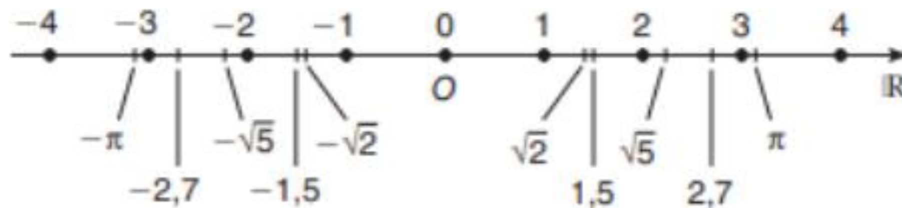
Matemática - Profº Caio Gamino | Profª Cassiana Mallet | Profª Letícia Alves



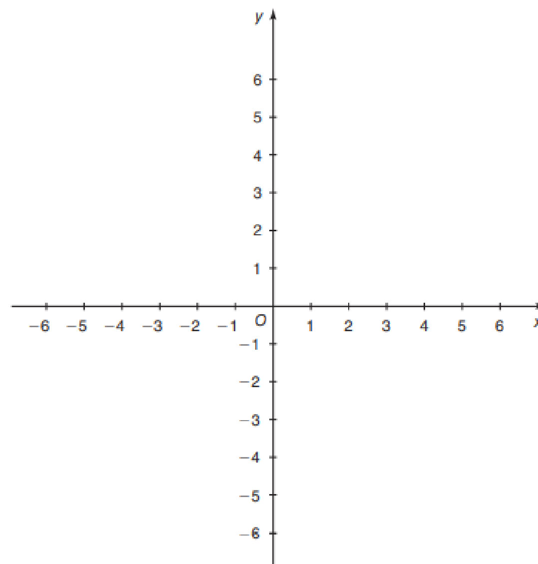
Funções – parte 1

Sistema de coordenadas cartesiano

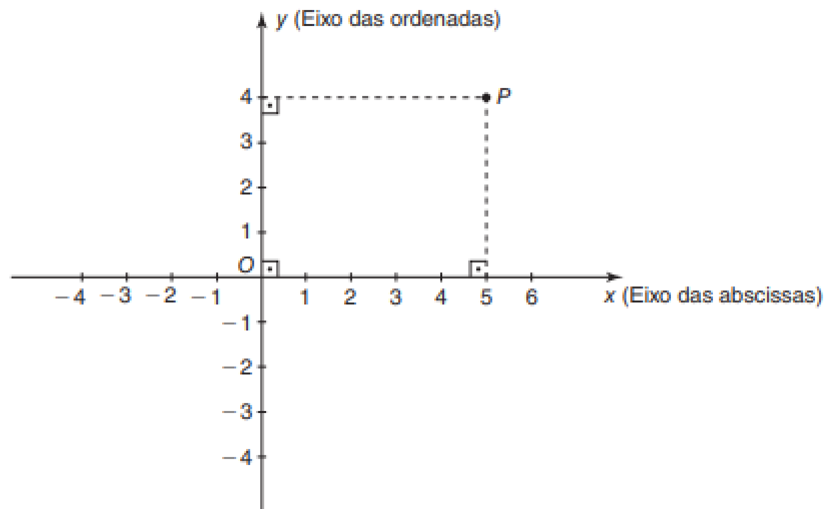
Na aula anterior de teoria de conjuntos, estudamos a reta dos reais e como podemos trabalhar com intervalos nessa mesma reta.



Porém, para trabalhar com coordenadas em um plano, utilizaremos o **sistema cartesiano ortogonal de coordenadas**, que basicamente é a utilização de dois eixos de números reais ortogonais entre si na origem (ou seja, formando um ângulo de 90º nos zeros das retas). Chamaremos esses eixos de x e y (ou eixo das abcissas e eixo das ordenadas respectivamente).



A partir da utilização desse sistema, podemos determinar as coordenadas de um ponto com as perpendiculares na abcissa e ordenada do ponto desejado:

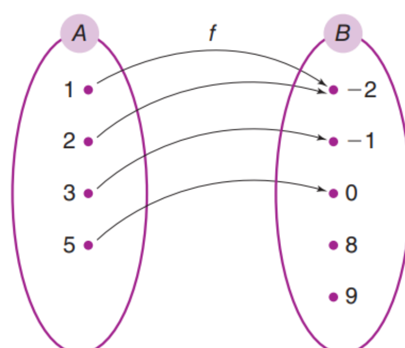


No exemplo acima, as coordenadas do ponto P são 5 e 4. A abscissa é 5, e a ordenada é 4. Indicamos esse fato por P (5, 4). A representação (5, 4) é chamada de "par ordenado de abscissa 5 e ordenada 4".

Introdução ao conceito de função

As funções basicamente criam uma associação entre valores de x com valores de y, se e somente se, a cada valor de x corresponder um único valor de y. Essa condição de correspondência tem o nome de lei de associação e quando possível, é expressa por uma equação.

Para dois conjuntos A e B não vazios, uma função de A em B consiste em uma regra que permite associar, a cada elemento de A, um único elemento de B. Se dermos o nome de f para esta função, a expressão "função f de A em B" é representada pela notação $f : A \rightarrow B$.

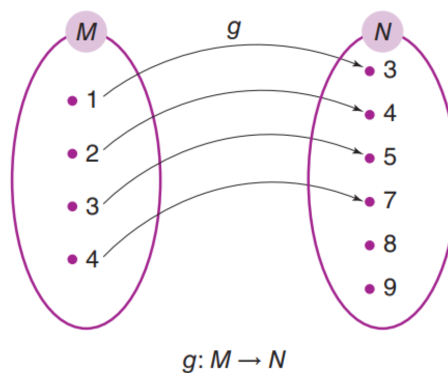


Destacamos que, como uma função f: A→B é um tipo particular de relação, temos:

- o **Domínio** da função é o próprio conjunto de partida, isto é, D(f) = A;
- o **Contradomínio** da função é o conjunto de destino CD(f) = B;
- a **Imagem** da função é o conjunto Im(f) = {y ∈ B | (x, y) ∈ f}. Como essa notação não é muito simples de entender, vamos dar uma outra explicação: Imagem é o conjunto dos elementos de B que estão relacionados com algum elemento de A. Para o diagrama acima, Im (f) = {-2, -1, 0}, que são os elementos em B que tem relação com os elementos de A através de f.

Exemplos de funções:

a) A relação *g*, abaixo, é uma função de M em N, pois qualquer elemento de M tem, através de *g*, um único correspondente em N.



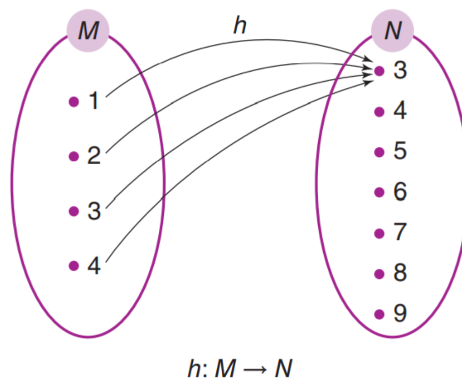
O domínio D(g), o contradomínio CD(g) e o conjunto imagem Im(g) dessa função são dados por:

D(g) = M = {1, 2, 3, 4}

CD(g) = N = {3, 4, 5, 7, 8, 9}

Im(g) = {3, 4, 5, 7}

b) A relação h, abaixo, é uma função de M em N, pois qualquer elemento de M tem, através de h, um único correspondente em N.

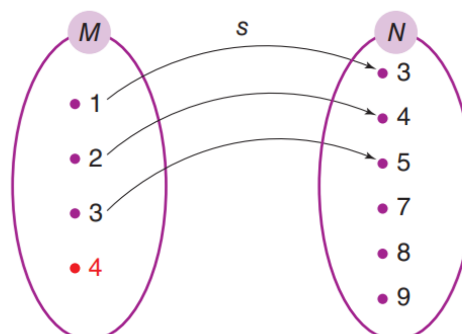


D(h) = M = {1, 2, 3, 4}

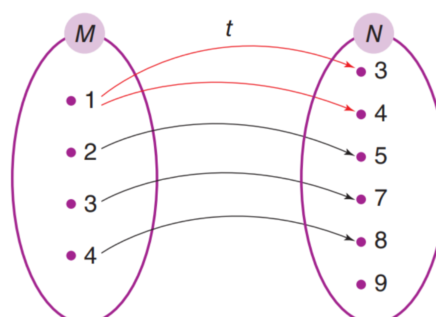
CD(h) = N = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Im(h) = {3}

c) A relação s, abaixo, **não é** função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 4) que não está associado, através de s, a algum elemento de N.



d) A relação t, abaixo, **não é** função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 1) que está associado, através de t, a mais de um elemento de N.



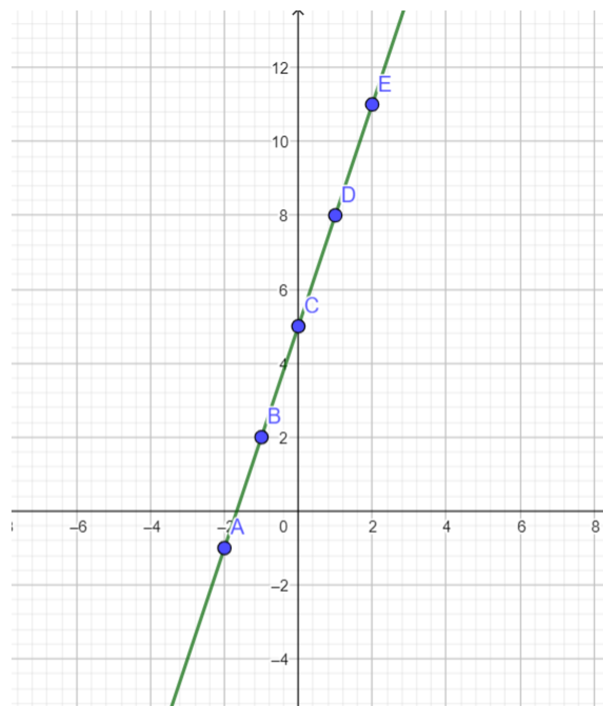
Atentar para o exemplo b, onde quatro valores de M têm a mesma correspondência em N e é função, porque todos os elementos têm apenas uma correspondência. Em contrapartida, atentar também para o exemplo d, onde um mesmo elemento de M tem duas correspondências em N, e logo, não é função. Todos os elementos do Domínio precisam ter apenas uma correspondência no Contradomínio para ser função.

Funções Reais

Trataremos, a partir de agora, apenas de funções cujo domínio e cujo contradomínio são subconjuntos dos números reais. Em particular, vamos tratar de funções definidas por uma formula do tipo y = f (x), que permite calcular, para cada valor de x do domínio, o valor correspondente de y.

Por exemplo, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = 3x+5 é uma função real dada por uma fórmula. Para cada valor de x real, podemos calcular sua imagem y = f (x).

x	y = f(x)
-2	-1
-1	2
0	5
1	8
2	11



Para desenhar esse gráfico, utilizamos o Geogebra, mostrado em aulas passadas, e calculamos alguns pontos e os ligamos através de uma reta.

Para desenhar os gráficos em geral, primeiro construímos uma tabela atribuindo alguns valores a x e calculamos os correspondentes valores de y. Depois, representamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) obtidos. Essa metodologia serve muito bem para as primeiras funções que vamos estudar, as funções afim e quadrática, de primeiro e segundo grau respectivamente. Para facilitar ainda mais, os pontos de maior

interesse são aqueles que cortam os eixos x e y. Para achar o ponto que corta o eixo y, apenas devemos aplicar f(0) ou x = 0 (será no máximo um ponto, já que para ser função, cada valor de x tem apenas uma correspondência em y). Já para encontrar os pontos que cortam o eixo x, devemos buscar os **zeros da função**. Os zeros de uma função f são dados pelos valores de x que satisfazem f (x) = 0 ou y = 0.

Uma forma de descrever precisamente uma função f é explicitar seu domínio, seu contradomínio e a lei que associa cada x do domínio ao correspondente y do contradomínio. Há casos, porém, em que a descrição de uma função pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação y = f(x), ficando subentendidos o domínio e o contradomínio. Para esses casos, podemos estabelecer o seguinte:

Uma função f pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação y = f(x) se, e somente se, o domínio de f for o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ em que f pode ser definida e o contradomínio de f for $\mathbb{R}$.

Assim, dada a função y = f(x), seu domínio D(f) e seu contradomínio CD(f) são os conjuntos:

- D(f) = {x ∈ $\mathbb{R}$ | f(x) ∈ $\mathbb{R}$} – x pertence aos reais tal que a função de x também pertença aos reais. Entenderemos como verificar esse domínio com a condição de existência para as funções.
- CD(f) ∈ $\mathbb{R}$

Considere a função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Como o domínio e o contradomínio não foram explicitados, admitimos CD(f) = $\mathbb{R}$ e D(f) = {x ∈ $\mathbb{R}$ | x ≠ 0}, pois:

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0$$

Isso acontece porque não dividir por zero é uma das condições matemáticas para realizarmos as contas. Essas restrições para os valores numéricos são chamadas de **condições de existência**.

Até o momento, conhecemos duas delas, que são as mais frequentes:

1) Em frações, o denominador não pode ser nulo, pois não existe divisão por zero na Matemática.
2) Em raízes de índice par, o radicando não pode ser negativo, pois não existem raízes de índice par para números negativos.

Vamos mostrar com alguns outros exemplos o que isso significa na prática para o Domínio das funções.

Exemplos:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

Neste exemplo, o denominador não pode ser zero, logo:

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

Então o D(f) = {x ∈ ℝ | x ≠ 1} ou ℝ - {1}

b) $f(x) = \sqrt{4x - 6}$

Neste caso, o radicando deve ser maior ou igual a zero para que exista:

$$4x - 6 \geq 0$$

$$4x \geq 6$$

$$x \geq \frac{6}{4}$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

Logo, D(f) = {x ∈ ℝ | x ≥ 3/2} ou [3/2, + ∞[

c) $f(x) = \sqrt[3]{3x - 9}$

Para esse exemplo, não existem restrições da condição de existência, porque a raiz tem índice ímpar, logo, D(f) = ℝ.

d) $f(x) = \frac{3}{x-8} + \sqrt{x - 5}$

Nesse exemplo, temos duas condições a respeitar, a do denominador e do radicando:

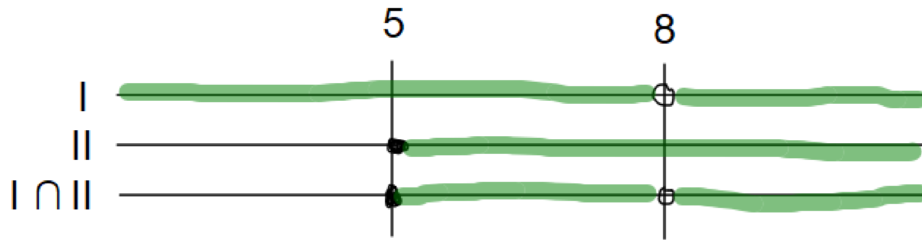
$$x - 8 \neq 0$$

$$x \neq 8$$

$$x - 5 \geq 0$$

$$x \geq 5$$

Para encontrar o intervalo do domínio, ele deve respeitar ambas as condições, ou seja, a solução é a intersecção de ambas.



D(f) = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \text{ e } x \neq 8\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 8 \text{ ou } x > 8\}$ ou $[5, 8[\cup]8, +\infty[$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$

Agora, temos 3 condicionantes, um denominador e dois radicandos. Tecnicamente podemos juntar duas das condições em uma, pois x+1 deve ser ao mesmo tempo não negativo e diferente de zero, ou seja, positivo (com exclusão do zero).

Juntando as duas condições de existência:

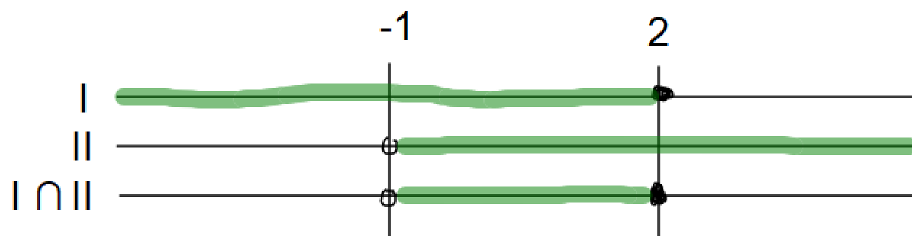
$$2 - x \geq 0$$

$$2 \geq x$$

$$x \leq 2$$

$$x + 1 > 0$$

$$x > -1$$



Sem juntar as condições de existência:

$$2 - x \geq 0$$

$$2 \geq x$$

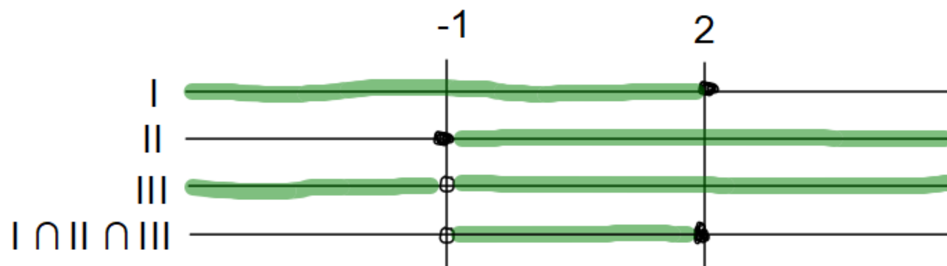
$$x \leq 2$$

$$x + 1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$



Logo, D(f) = {x ∈ ℝ | –1 < x ≤ 2} ou] –1, 2].

f) Encontre o domínio e o(s) zero(s) da função $f\ (x)\ =\ \frac{2x+8}{\mathrm{x}-1}$

Vamos primeiramente procurar o Domínio. A única condição de existência é que o denominador não pode ser zero, logo D(f) = {x ∈ ℝ | x ≠ 1} ou ℝ - {1}

Mas para encontrar os zeros da função, teremos que pensar um pouco...

Para que $\frac{2x+8}{\mathrm{x}-1} = 0$, temos apenas uma solução, que é o numerador (a parte de cima da fração) ser zero. Qualquer número que a parte de baixo represente, não vai tornar a parte de cima zero. Logo:

$$2x + 8 = 0$$

$$2x = -8$$

$$x = -\frac{8}{2} = -4$$

g) Construa o gráfico da função f (x) = x².

Vamos utilizar as dicas de montagem de gráfico comentadas anteriormente. Achar os zeros da função e aplicar para x = 0, depois, caso não saibamos ainda qual o formato geral da função, podemos aplicar para mais pontos.

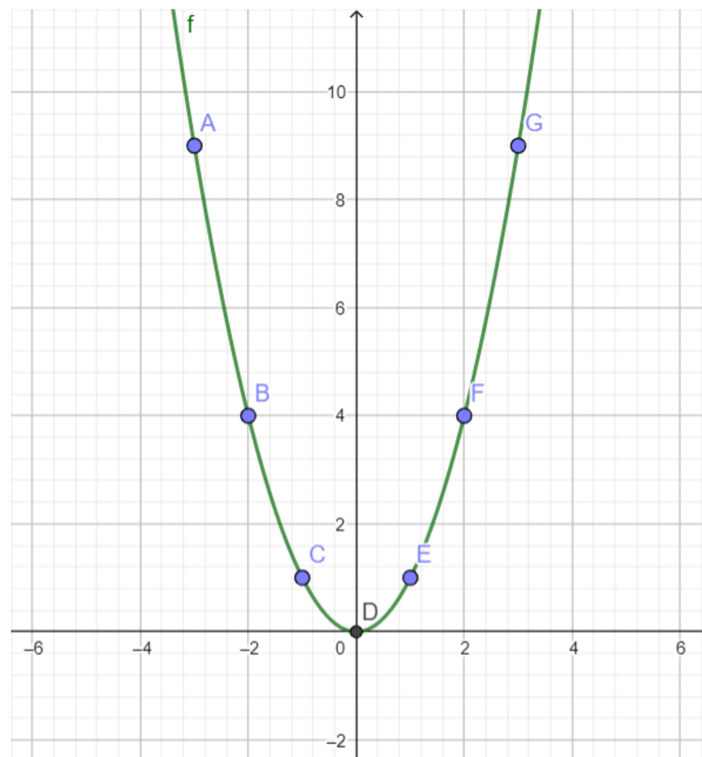
Para encontrar os zeros da função: f(x) = 0

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Logo, vamos precisar aplicar a fórmula para mais valores, já que não sabemos o formato ainda:

x	$y = f(x) = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

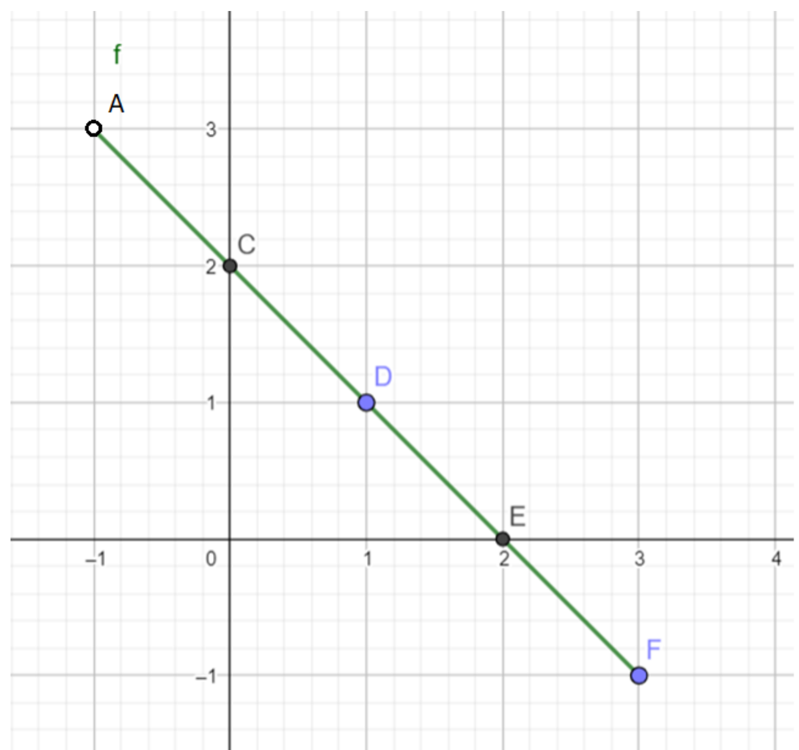


Colocando os pontos no plano cartesiano, podemos notar que o gráfico é de uma parábola, assim como sugere a equação de segundo grau, característico desse tipo de figura.

h) Construa o gráfico da função $f:]-1, 3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 2$.

Essa função tem Domínio apenas no intervalo $]-1, 3]$, logo, ela deve ser desenhada apenas nesse intervalo:

x	y = f(x) = -x + 2
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	-1



É importante lembrar que dado o intervalo do domínio, o ponto A é um ponto ABERTO e não faz parte do gráfico de fato (por isso não está representado pelo Geogebra no plano cartesiano).

Função Crescente, Decrescente e Constante

Uma função f é crescente sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação positiva em f(x). Isto é:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio de f, dizemos que a função é estritamente crescente.

Uma função f é decrescente sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação negativa em f(x). Isto é:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

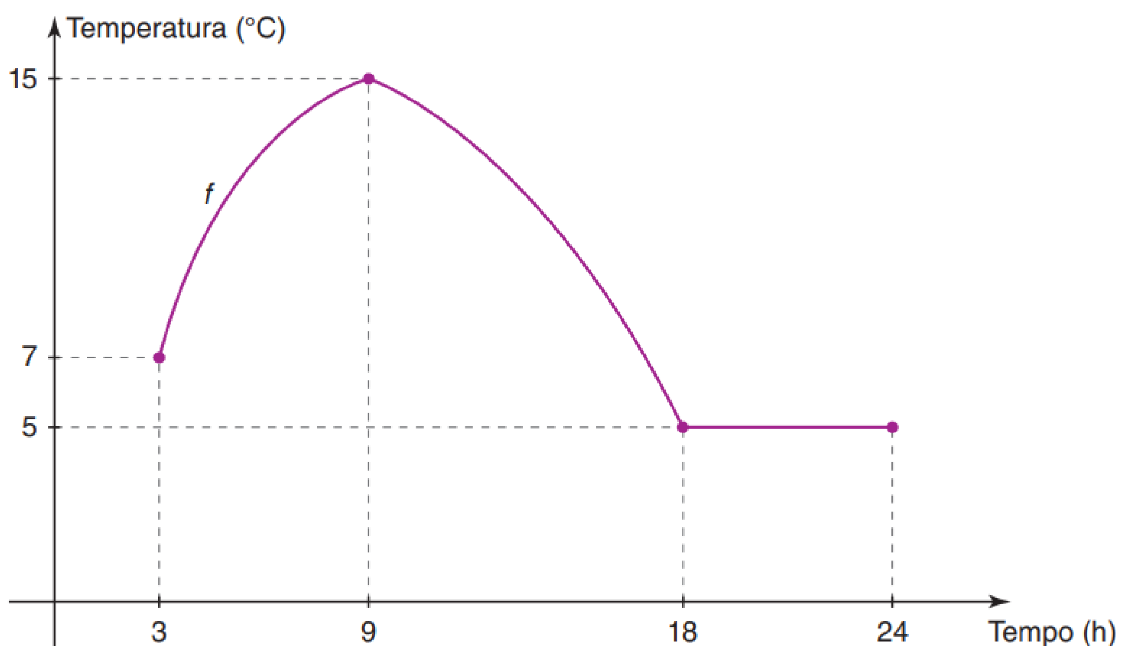
Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio de f, dizemos que a função é estritamente decrescente.

Uma função f é constante sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação nula em f(x). Isto é:

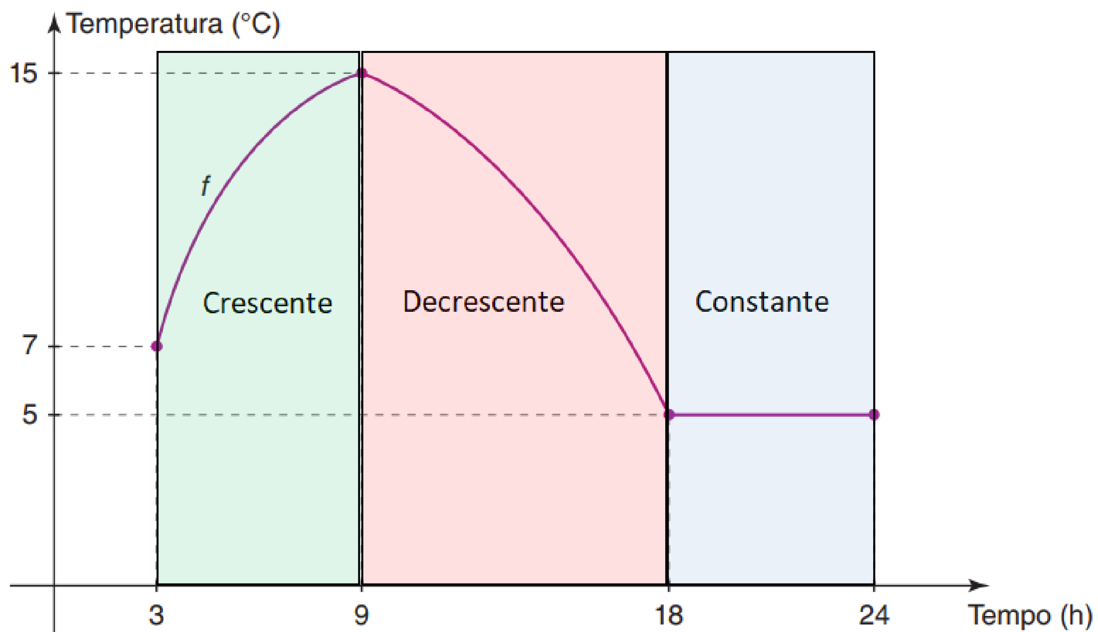
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Exemplo:

1) A seguir, temos uma curva com a temperatura de um objeto em função do tempo:



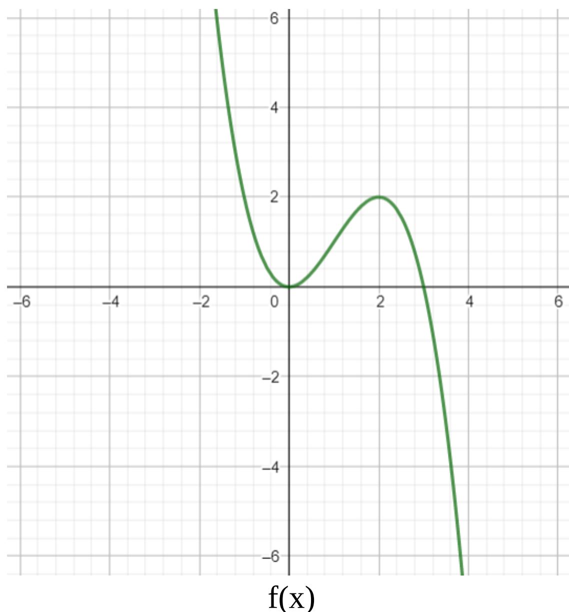
Analisando o gráfico, temos exemplos dos três tipos de função indicados:



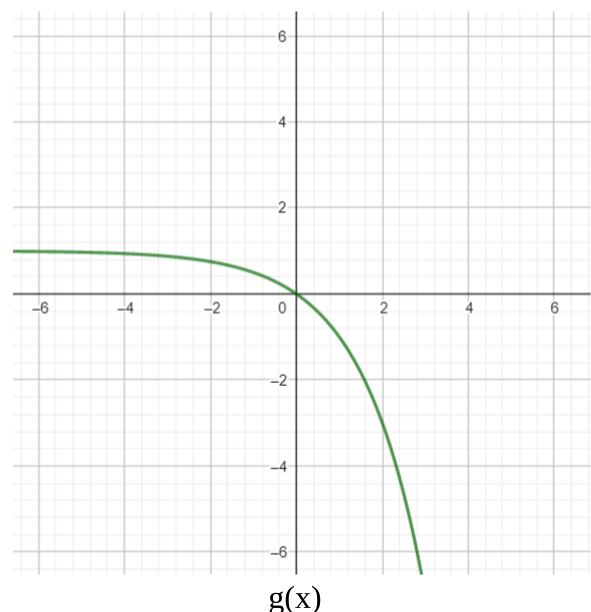
2) A seguir temos os gráficos das funções f, g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x^3}{2} \ e \ g(x) = -2^x + 1$$

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento destas funções.



f(x)



g(x)

A função f(x) é uma função do terceiro grau (porque a potência ao qual o x está elevado é 3) e temos três intervalos distintos:

] - ∞, 0 [é decrescente pois $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 = -2$ e $x_2 = -1$

] 0, 2 [é crescente pois $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 = 0,5$ e $x_2 = 1$

] 2, + ∞ [é decrescente pois $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$

Atentar para o fato de que os pontos de inflexão (ou seja, aqueles em que a tendência de crescimento ou decrescimento se inverte) não fazem parte dos intervalos.

Por sua vez, a função g(x) é uma função exponencial (porque o x está no expoente de um número) e inteira decrescente. Ela pode dar a impressão de que se torna constante para valores de x abaixo de -6, porém ela sempre diminui, sem ter alcançado o valor de 1. Podemos provar a partir da seguinte tabela com valores de g(x):

x	g(x) = -(2)^x+1
-4	0,937500000000000
-10	0,999023437500000
-20	0,999999046325683
-30	0,999999999068677

Ou seja, quanto menor o valor de x, mais próximo de 1 ele se torna, mas nunca chegará a 1, exatamente porque sempre existirá um termo a ser subtraído (o -2^x), por menor que ele seja. Outra forma de ver isso é invertendo a equação:

$$g(x) = 1 - 2^x$$

Quanto menor o x, menor será esse valor de -2^x. Para a reta paralela ao eixo das abcissas em y = 1, damos o nome de assíntota. Uma assíntota de uma curva é uma reta a qual a curva se aproxima conforme é percorrida, porém nunca a encosta. Estudaremos esse assunto melhor nas funções logarítmicas e exponenciais que veremos nas próximas aulas.